

# MATEMATIKA

*„A tanítás céljáról régimódi felfogást vallok, először és elsősorban GONDOLKODNI kell tanítanunk!” – Pólya György: A problémamegoldás iskolája*

Ez a helyi tanterv azon diákok számára készült, akik a matematikát a 11-12. évfolyamon emelt szinten kívánják tanulni. A helyi tanterven leírt követelmények évfolyamonként egy-egy csoportra, két évre vonatkoznak. A helyi tanterv a 2017. január 1-jétől hatályos Matematika részletes érettségi vizsgakövetelmények alapján készült, tartalmazza az emelt szintű kiegészítő tananyagokat témakörönként.

## Célok és feladatok

Az emelt szintű matematika tanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról, mint tudásrendszerrel és mint sajátos emberi megismerési, gondolkodási, szellemi tevékenységről. A matematika tanulása érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja, gazdagítja a személyiséget, fejleszti az önálló, rendszerezett gondolkodást, és alkalmazásra képes tudást hoz létre. A matematikai gondolkodás fejlesztése segíti a gondolkodás általános kultúrájának kiteljesedését. A tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése során alapvető cél, hogy mindinkább ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. A matematikai nevelés sokoldalúan fejleszti a tanulók modellalkotó tevékenységét. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő képességek fejlesztése. Egyaránt lényeges a reprodukív és a problémamegoldó, valamint az alkotó gondolkodásmód megismerése, elsajátítása, miközben nem szorulhat háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése sem. A tanulás elvezethet a matematika szerepének megértésére a természet- és társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában. Segít kialakítani a megfogalmazott összefüggések, hipotézisek bizonyításának igényét. Megmutathatja a matematika hasznosságát, belső szépségét, az emberi kultúrában betöltött szerepét. Fejleszti a tanulók térbeli tájékozódását, esztétikai érzékét.

A tanulási folyamat során fokozatosan megismertetjük a tanulókkal a matematika belső struktúráját (fogalmak, axiómák, tételek, bizonyítások elsajátítása). Mindezzel fejlesztjük a tanulók absztrakciós és szintetizáló képességét. Az új fogalmak alkotása, az összefüggések felfedezése és az ismeretek feladatokban való alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a kreativitást, az önálló gondolatok megfogalmazását, a felmerült problémák megfelelő önbizalommal történő megközelítését, megoldását. A diszkussziós képesség fejlesztése, a többféle megoldás keresése, megtalálása és megbeszélése a többféle nézőpont érvényesítését, a komplex problémakezelés képességét is fejleszti. A folyamat végén a tanulók eljutnak az önálló, rendszerezett, logikus gondolkodás bizonyos szintjére.

A műveltségi terület a különböző témakörök szerves egymásra épülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát. A fogalmak, összefüggések érlelése és a matematikai gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol – az

életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően.

A matematikai értékek megismerésével és a matematikai tudás birtokában a tanulók hatékonyan tudják használni a megszerzett kompetenciákat az élet különböző területein. A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán műveltségterületek, illetve a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez. Ezért a tanulóknak rendelkezniük kell azzal a képességgel és készséggel, hogy alkalmazni tudják matematikai tudásukat, és felismerjék, hogy a megismert fogalmakat és tételeket változatos területeken használhatjuk. Az adatok, táblázatok, grafikonok értelmezésének megismerése nagyban segítheti a mindennapokban, és különösen a média közleményeiben való reális tájékozódást. Mindehhez elengedhetetlen egyszerű matematikai szövegek értelmezése, elemzése. A tanulóktól megkívánjuk a szaknyelv életkornak megfelelő, pontos használatát, a jelölésrendszer helyes alkalmazását írásban és szóban egyaránt.

A tanulók rendszeresen oldjanak meg önállóan feladatokat, aktívan vegyenek részt a tanítási, tanulási folyamatban. A feladatmegoldáson keresztül a tanulók képessé válhatnak a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára. Kialakul bennük az önellenőrzés igénye, a sajátjukétól eltérő szemlélet tisztelete. Mindezek érdekében is a tanítás folyamában törekedni kell a tanulók pozitív motiváltságának biztosítására, önállóságuk fejlesztésére. A matematikatanítás, -tanulás folyamatában egyre nagyobb szerepet kaphat az önálló ismeretszerzés képességnek fejlesztése, az ajánlott, illetve az önállóan megkeresett, nyomtatott és internetes szakirodalom által. A matematika a lehetőségekhez igazodva támogatni tudja az elektronikus eszközök (zsebszámológép, számítógép, grafikus kalkulátor), internet, oktatóprogramok stb. célszerű felhasználását, ezzel hozzájárul a digitális kompetencia fejlődéséhez.

A tananyag egyes részleteinek csoportmunkában történő feldolgozása, a feladatmegoldások megbeszélése az együttműködési képesség, a kommunikációs képesség fejlesztésének, a reális önértékelés kialakulásának fontos területei. Ugyancsak nagy gondot kell fordítani a kommunikáció fejlesztésére (szövegértésre, mások szóban és írásban közölt gondolatainak meghallgatására, megértésére, saját gondolatok közlésére), az érveken alapuló vitakészség fejlesztésére. A matematikai szöveg értő olvasása, tankönyvek, lexikonok használata, szövegekből a lényeg kiemelése, a helyes jegyzeteléshez szoktatás a felsőfokú tanulást is segíti.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen előnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jártas a problémamegoldásban. A matematikatanítás alapvető feladata a pénzügyi-gazdasági kompetenciák kialakítása. Szánjunk kiemelt szerepet azoknak az optimum-problémáknak, amelyek gazdasági kérdésekkel foglalkoznak, amikor költség, kiadás minimumát; elérhető eredmény, bevétel maximumát keressük. Fokozatosan vezessük be matematikafeladatainkban a pénzügyi fogalmakat: bevétel, kiadás, haszon, kölcsön, kamat, értékcsökkenés, -növekedés, törlesztés, futamidő stb. Ezek a feladatok erősítik a tanulóknak azt a tudatot, hogy matematikából valóban hasznos ismereteket tanulnak, illetve, hogy a matematika alkalmazása a mindennapi élet szerves része. Az életkor előrehaladtával egyre több példát mutassunk arra, milyen területeken tud segíteni a matematika.

A matematika a kultúrtörténetnek is része. Segítheti a matematikához való pozitív hozzáállást, ha bemutatjuk a tananyag egyes elemeinek a művészetekben való alkalmazását. A motivációs bázis kialakításában komoly segítség lehet a matematikatörténet egy-egy mozzanatának

megismertetése, a máig meg nem oldott, egyszerűnek tűnő matematikai sejtések megfogalmazása, nagy matematikusok életének, munkásságának megismerése. A NAT néhány matematikus ismeretét előírja minden tanuló számára: Euklidész, Pitagorasz, Descartes, Bolyai Farkas, Bolyai János, Thalész, Euler, Gauss, Pascal, Cantor, Erdős, Neumann.

A 11-12. évfolyam fontos szakasz, az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, és egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárggyal, valamint a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó készség az élet legkülönbözőbb területein segíthet. Ezt célszerű tudatosítani a tanulóknál.

Az emelt szintű matematika foglalkozások az emelt szintű érettségire és a főiskolai- egyetemi tanulásra való felkészítést célozzák meg, továbbá törekednünk kell arra, hogy az egyes szakmák számára alkalmazható matematikai ismeretekkel is rendelkezzenek a tanulók.

A problémamegoldó készségen túl fontos az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, az alkalmazási lehetőségek megtalálása, a kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, miközben sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható a tanulóktól többféle készség és ismeret együttes alkalmazása. Minden témában hangsúlyosan kell kitérnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakításra. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzaktság pedig a felsőfokú képzésre való készülést.

Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák. Ezen kívül a 11. és a 12. évfolyamon ismétlésre 12 órát, számonkérésre és értékelésre 8 órát tervezünk.

## 11. évfolyam

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	1. Gondolkodási és megismerési módszerek	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek alkalmazása véges halmazokon. Halmazábra. Számhalmazok, ponthalmazok. Definíció és tétel felismerése, állítás és megfordításának felismerése. Logikai szita alkalmazása. Gráfok használata gondolatmenet fejlesztésére.	

<p><b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b></p>	<p>Az emelt szinten érettségiző diák ismerje a halmazelmélet alapvető szerepét a mai matematika felépítésében.</p>
<p><b>Ismeretek/Fejlesztési követelmények</b></p>	<p><b>Kapcsolódási pontok</b></p>
<p>De-Morgan azonosságok Megosztott figyelem, két illetve több szempont egyidejű követése. Alaphalmaz nélkül nincs komplementerhalmaz. Logikai szita Két vagy több szempont egyidejű követése. Szöveges megfogalmazások matematikai modellre fordítása.</p> <p>Halmazok számossága. Véges és végtelen halmazok. Annak megértése, hogy csak a véges halmazok elemszáma adható meg egy természetes számmal.</p> <p>Megszámlálhatóan és nem megszámlálhatóan végtelen halmazok. Annak tudatosítása, hogy csak a véges halmazok elemszáma adható meg természetes számmal. Különbség megszámlálhatóan végtelen és kontinuum végtelen halmaz között.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Georg Cantor.</p>	<p><i>Informatika:</i> könyvtárszerkezet a számítógépen; adatbázis-kezelés, adatállományok, adatok szűrése különböző szempontok szerint.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> mondatok, szavak, hangok rendszerezése.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> rendszerteran.</p>
<p>Bizonyítási módszerek (direkt és indirekt bizonyítás, skatulya-elv, teljes indukció) Sejtés, bizonyítás, cáfolás. Érvelés és vita. Érvek és ellenérvek. Ellenpélda szerepe. Megosztott figyelem. Bizonyítási igény kialakítása. Gondolatmenet tagolása, rendszerezés. Következtetés.</p>	<p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> szövegértés, másik érvelésének figyelembe vétele</p>
<p>Bizonyítási módszerek áttekintése.</p>	<p><i>Etika:</i> következtetés, érvelés, bizonyítás és cáfolat szabályainak alkalmazása <i>Filozófia:</i> gondolati rendszerek felépítése, állítások igazolásának szükségessége.</p>
<p>Logika. Logikai műveletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Tétel és megfordítása. Minden és van olyan használata. Matematikai és más jellegű érvelésekben a logikai műveletek felfedezése, megértése, önálló alkalmazása. A köznapi szóhasználat és a matematikai szóhasználat összevetése. Logikai</p>	<p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> kötőszavak használata, szövegértés, retorikai alapismeretek.</p>

<p>és halmazelméleti műveletek kapcsolata.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Pólya György, George Boole.</p>	
<p>Permutációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), variációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), kombinációk (ismétlés nélkül) definíciói, kiszámítására vonatkozó képletek és bizonyításaik. Modell alkotása valós problémához. kombinatorikai modell. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Kombinatorikai problémák rendszerezése.</p> <p>Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik. Binomiális tétel. Pascal-háromszög és tulajdonságai.</p> <p>Jelek szerepe, alkotása, használata: célszerű jelölés</p> <p>megválasztásának jelenősége a matematikában. <i>Matematikatörténet:</i> Blaise Pascal, Erdős Pál.</p>	<p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> szövegértés. <i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.</p>
<p>Gráfok. Többszörös él, hurokél, út, kör, összefüggő gráf, egyszerű gráf, fa. Fa pontjai és élei száma közötti összefüggés. Gráfok alkalmazása problémamegoldásban. Modell alkotása valós problémához: gráfmodell. Gráfok eszközjellegű használata problémamegoldásban (számítógépek, elektromos hálózatok, úthálózat). Gondolatmenet megjelenítése gráffal.</p>	<p><i>Kémia:</i> molekulák térszerkezete. <i>Informatika:</i> problémamegoldás informatikai eszközökkel, hálózatok.</p> <p><i>Történelem és állampolgári ismeretek:</i> családfa.</p> <p><i>Technika, életvitel:</i> közlekedés.</p> <p><i>Földrajz:</i> térképek, úthálózatok.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.</p>
<p><b>Kulcsfogalmak/fogalmak</b></p>	<p>Unió, metszet, komplementer. Véges és megszámlálhatóan végtelen halmaz. Logikai műveletek (nem, és, vagy, ha ...akkor, akkor és csak akkor,... ha). Többszörös él, hurokél, út, kör, összefüggő gráf, egyszerű gráf, fa.</p>

## 2. Számelmélet, algebra

### 2.1. Alapműveletek, valós számok, oszthatóság,

maza. Műveletek sorrendje, zárójelek használata. Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. Prímszámok, gyökkvonás, logaritmus fogalmának ismerete, azonosságok.

Algebrai átalakításokat igénylő feladatok megoldásában is. Az algebra tanításának egyik fő célja annak felfedeztetése, hogy bizonyítások leírásuk formálisan azonos módon történik. Fontos a számolás során megismert műveleti szabályok absztrahálása, amelyek a permanencia-elv fontosságának felismeréséhez.

<p><b>vetelmények</b></p>	
<p>is számok, zárt a ainak jelölésére.</p> <p>irracionális számok, számegyenes</p> <p>valós számok). számhalmazok. kapcsolata.</p>	<p><i>Filozófia:</i> gondolati rendszerek f</p>
<p>indukció</p> <p>van alkalmazása</p> <p>oszthatósági</p> <p>alaptétele. (bizonyítással). feladatokban.</p> <p>ény fejlesztése, teljes indukciós bizonyítás fejlesztése.</p> <p>ben felírt számok összeadása és kivonása.</p>	<p><i>Informatika:</i> nagy prímek szerep</p>
	<p><i>Informatika:</i> kettes, nyolcas, tize</p>
	<p><i>Fizika; kémia:</i> mennyiségek kisz</p>
<p>etekben. Pascal-háromszög. Geometria: azonosságok „rajzos” igazolása.</p>	

adott racionális szám közös nevezőre hozása, törtek összeadása.	<i>Fizika: képletek átalakítása, szám</i>
szorzatok, ismeretek alapján. A hatványfogalom célszerű kiterjesztése. logaritmusára vonatkozó azonosságok bizonyítása. Más alapú logaritmusra való áttérés kezelése.	<i>Fizika: radioaktivitás (bomlási törvény) Technika és életvitel: kamatszám</i>
szám. Polinom fokszáma, azonosság. Racionális kitevőjű hatvány. Logaritmus.	

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>2. Számelmélet, algebra 2.2. Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer</b>	<b>Órakeret 10 óra</b>
<b>Előzetes tudás</b>	Egyismeretlenes, elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Egyismeretlenes másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Exponenciális és logaritmusos egyenletek megoldása. Trigonometrikus egyenletek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellenőrzés. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása. Számológép biztos használata.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az ellenőrzés fontossága. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelően. Az önellenőrzés képességének fejlesztése.	
<b>Ismeretek/Fejlesztési követelmények</b>	<b>Kapcsolódási pontok</b>	

<p>Elsőfokú paraméteres egyenletek. Esetsztésválasztás, divergens gondolkodás fejlesztése.</p>	<p><i>Fizika; kémia:</i> képletek értelmezése, egyenletek rendezése.</p>
<p>Elsőfokú, háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Megosztott figyelem, több szempont egyidejű követése. Számolási készség és algebrai ismeretek fejlesztése. Szöveges megfogalmazások matematikai modellre fordítása. A kapott eredmény értelmezése, valóságtartalmának vizsgálata.</p>	<p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>Másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetése. Ismeretek tudatos memorizálása. Diszkrimináns fogalmának fontossága. Összefüggések a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között. Gyökök és együtthatók összefüggéseinek megismerése és alkalmazása feladatokban. Önellenőrzés: egyenlet megoldásának ellenőrzése.</p> <p>Másodfokú paraméteres egyenletek megoldása. Esetsztésválasztás, divergens gondolkodás fejlesztése.</p> <p>Másodfokúra visszavezethető egyenletrendszerek megoldása. Matematikai modell megalkotása szöveg alapján. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. A megoldás ellenőrzése. A gyakorlati feladat összevetése a valósággal.</p> <p>Értelmezési tartomány, értékészlet vizsgálattal valamint szorzattá alakítással megoldható összetett feladatok megoldása.</p> <p>Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése.</p>	<p><i>Fizika:</i> egyenletesen gyorsuló mozgás leírása. <i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p> <p><i>Fizika:</i> ütközések.</p>
<p>Négyzetgyökös egyenletek – két négyzetreemeléssel megoldható feladatok. Ekvivalens és nem ekvivalens átalakítások. Egyszerű négyzetgyökös egyenlőtlenségek.</p> <p>Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Összetettebb algebrai műveletek elvégzése. Ellenőrzés igénye és fontossága. Önellenőrzés képességének fejlesztése.</p> <p>Abszolút értéket tartalmazó egyenletek – Több abszolút értéket tartalmazó feladatok. Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek.</p> <p>Egy adott problémára két különböző módszer: algebrai és grafikus megoldás. Számolási készség és algebrai ismeretek fejlesztése.</p>	<p><i>Fizika:</i> a mérés hibája.</p>



<p>Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése.</p>	
<p>Összetett exponenciális és logaritmos egyenletek és egyenletrendszerek megoldása. Egyszerű exponenciális és logaritmusos egyenlőtlenségek. Ismeretek mozgósítása. Modellek alkotása (algebrai modell): összetett exponenciális és logaritmusos egyenletekre, egyenletrendszerekre illetve egyszerű egyenlőtlenségekre vezető problémák. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Számológép tudatos használata.</p>	<p><i>Földrajz, biológia-egészségtan:</i> globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás). <i>Kémia:</i> pH-számítás.  <i>Fizika:</i> radioaktivitással kapcsolatos számítási feladatok.  <i>Fizika:</i> régészeti leletek – kormeghatározás.  <i>Földrajz:</i> földrengések.  <i>Technika és életvitel:</i> zajszennyezés.</p>
<p>Másodfokúra visszavezethető és az addíciós tételek alkalmazását igénylő trigonometrikus egyenletek megoldása. Egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek. A matematika és a valós élet kapcsolata. Modellek alkotása (algebrai modell): trigonometrikus egyenletekre és egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségekre vezető problémák. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Ismeretek tudatos használata. Számológép tudatos használata.</p>	<p><i>Fizika:</i> rezgőmozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsuláshoz tartozó időpillanatok meghatározása.</p>
<p>Számítási, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőtlenség. Algebrai bizonyítás két változóra. Szélsőérték-feladatok közepek segítségével. Másodfokú függvényre visszavezethető szélsőérték feladatok megoldása. Az eredmény és a valóság összevetése. Számítógépek alkalmazásának lehetősége a problémamegoldásban. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése.</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú minimum és maximum problémák. <i>Filozófia:</i> egy adott rendszeren belül megoldhatatlan problémák létezése.</p>
<p><b>Kulcsfogalmak/fogalmak</b></p>	<p>Egyenlet értelmezési tartománya. Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkriminánsa. Egyenletrendszer. Négyzetgyökös egyenlet. Paraméteres egyenlet.</p>

	<p>Exponenciális egyenlet. Logaritmikus egyenlet. Trigonometrikus egyenlet. Számítási közép. Mértani közép. Harmonikus közép. Négyzetes közép.</p> <p>Egyenlet értelmezési tartománya. Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkriminánsa. Egyenletrendszer. Négyzetgyökös egyenlet. Paraméteres egyenlet. Exponenciális egyenlet. Logaritmikus egyenlet. Trigonometrikus egyenlet. Számítási közép. Mértani közép. Harmonikus közép. Négyzetes közép.</p>
--	--

	<b>3. E</b>
	Halmazok. Hozzárendelés fogalma. Pontok ábrázolása számg
<b>ai</b>	A sorozat diszkrét folyamatok megjelenítésére alkalmas ma matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek alkalmazása.

**Ismeretek/Fejlesztési követelmények**

ok halmaza. Rekurzív sorozatok értelmezése.

---

konvergencia fogalmának bevezetése, megértése. Divergens és valódi divergens sorozatok fogalmának megértése. Példák kon

tése. Ismeretek memorizálása. Ismeretek tudatos alkalmazása.

---

at első  $n$  tagjának az összege kifejezhető az első tag és a differencia segítségével. Mértani sorozat általános tagja kifejezhe  
tése.

---

vagy több szempont egyidejű követése. Nyitottság az érdekességekre: filozófiai problémák és geometriai alkalmazások (frak

---

lekkkel meghirdetett befektetések és hitelek vizsgálata. Egyéni döntés felelőssége. Modell összevetése a valósággal. Megosz

---

	Sorozat. Számtani sorozat, mértani sorozat. Rekurzív sorozat. Korlátos
--	--

---

### **3. Függvények, az analízis elemei**

---

galma, megadása, értelmezési tartomány, értékészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélsőérték, monoton

---

---

t, amelyekre más szaktudományokban is szüksége lehet. Ezek segítségével tudjon függvényvizsgálatokat végezni. A függvény

---

### **ek/Fejlesztési követelmények**

---

ellemzésének szempontjai – értelmezési tartomány, értékészlet, monotonitás, zérushely, szélsőérték, paritás, periodicitás.

---

észűkítése és kiterjesztése. Összetett függvény fogalma, inverzfüggvény fogalma. Összetett függvény képzése.

vény egyszerre értelmezve van. Kívül-belül függvény: összetett függvény ott van értelmezve, ahol a belső függvény olyan pont egyidejű követése. Ismeretek memorizálása, tudatos alkalmazása.

---

összekapcsolása.

---

ek. Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen

---

os függvények.

---

ánytangense, pillanatnyi sebesség meghatározása.

---

deriváltfüggvény.

---

k deriváltja, logaritmusfüggvény összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja, deriváltja, deriváltak.

konvexitás kapcsolata.

szélsőérték-feladatok

megoldása.

vény. Inverz függvény. Függvény korlátossága. Függvényfolytonosság, - határérték. Különbségi hányados függvény, deriv

## 12. évfolyam

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>3. Függvények, az analízis elemei</b> <b>3.3 Integrálszámítás</b>	<b>Órakeret 12 óra</b>
<b>Előzetes tudás</b>	Folytonos függvények fogalma. Területszámítás elemei. Sorozatok, véges sorok. Differenciálási szabályok ismerete.	

<p><b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b></p>	<p>Az integrálszámítás módszereivel találkozáva a közelítő módszerek ismeretének bővítése. A függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén. Áttekintő kép kialakítása a térgeometriáról, a felszín- és térfogatszámítás módszereiről.</p>
<p><b>Ismeretek/Fejlesztési követelmények</b></p>	<p><b>Kapcsolódási pontok</b></p>
<p>Bevezető feladatok az integrál fogalmához: függvény grafikonja alatti terület, a megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület, a munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.</p>	
<p>Kétoldali közelítés módszere. Alsó és felső közelítő összegek. A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig. Példa nem integrálható függvényre is. A határozott integrál és a terület-előjeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása. <i>Matematikatörténet:</i> Bernhard Riemann.</p>	<p><i>Informatika:</i> számítógépes szoftver használata.</p>
<p>Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele. Korlátos és monoton függvények integrálhatósága. A határozott integrál tulajdonságai.</p>	<p><i>Fizika:</i> A munka és a mozgási energia. Elektromos feszültség két pont között, a potenciál. Tehetetlenségi nyomaték. Alakzat tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő. Effektív áramerősség.</p>
<p>Az integrál, mint a felső határ függvénye. Integrálfüggvény. Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja.</p> <p>Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között. A primitív függvény fogalma. A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• hatványfüggvény, polinomfüggvény,</li> <li>trigonometrikus függvények,</li> </ul>	

<ul style="list-style-type: none"> <li>• exponenciális függvény, logaritmusfüggvény.</li> </ul> <p>A Newton-Leibniz-tétel. <i>Matematikatörténet:</i> Newton, Leibniz, Euler.</p>		
<p>Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Polinomfüggvények, szinusz és koszinuszfüggvény grafikonja alatti terület kiszámítása. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása. Forgástest térfogatának meghatározása.</p>		<p><i>Fizika:</i> Potenciál, munkavégzés elektromos, illetve gravitációs erőterben. Váltakozó áram munkája, effektív áram és feszültség. Newton munkássága.</p>
<p><b>Kulcsfogalmak/fogalmak</b></p>	<p>Alsó- és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton-Leibniz-tétel. Felszín, térfogat, forgástestek.</p>	

#### 4. Geometria

##### 4.1. Alapfogalmak, geometriai transzformációk, síkbeli és térbeli alakzatok

szögek tulajdonságai. Speciális háromszögek, négyszögek elnevezése, felismerése, tulajdonságaik. Háromszögek szerkesztésének ismerése környezetünkben, alkalmazásuk egyszerű feladatokban.

struktúraalkotás fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. Az emelt szinten érettségizők számára a számítási terv készítése (megfelelő részlet kiválasztása, a részletszámítások logikus sorrendbe illesztése). A geometriai transzformációk ismeretét a képek és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények értelmezése.

<p><b>vetelmények</b></p>		
<p>távolsága</p>	<p>és</p>	<p>hajlásszöge.</p>
		<p><i>Vizuális kultúra:</i> térbeli viszonyok.</p>
<p>halmaza – síkban: parabola. Egyenlőtlenséggel meghatározott pontthalmazok.</p>		<p><i>Fizika:</i> parabolatükör. Informatika</p>



<p>síkidomok egybevágóságának fogalma, sokszögek egybevágóságának feltétele. Térbeli változó tulajdonságok tudatosítása. A probléma megoldásához szükséges transzformáció</p>	<p><i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogramok használata.</p>
<p>e. Megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása. A probléma megoldásához szükséges (bizonyítással).</p>	<p><i>Földrajz:</i> térképek. <i>Vizuális kultúra:</i> építészeti tervrajzok.</p> <p><i>Fizika:</i> optikai eszközök nagyítása.</p>
<p>ismeretek tudatos és pontos alkalmazása.</p>	
<p>tétel megfordítása (bizonyítással).</p>	
<p>e. Ismeretek tudatos memorizálása. Geometriai feladatok megoldásához megfelelő tételek</p>	<p><i>Vizuális kultúra:</i> festészet, építészet.</p> <p><i>Ének-zene:</i> az aranymetszés megismerése.</p>
<p>feladatok megoldása. Ismeretek tudatos memorizálása. Ismeretfejlesztés. Feladatok megoldása. Ismeretfejlesztés. Ismeretek tudatos memorizálása.</p>	<p><i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata.</p>
<p>vonatkozó tétel (bizonyítással), konvex sokszög külső szögeire vonatkozó tétel (bizonyítással).</p>	

fejlesztése. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.	
szögek tétele (bizonyítással).	
memorizálása. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.	
áció. Húrnégyszög. Érintőnégyyszög. Sokszög. Vektor. Kerületi és középponti szög.	

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>4.Geometria, koordinátageometria, trigonometria</b>	<b>Órakeret 10 óra</b>
<b>Előzetes tudás</b>	<b>4.2 Vektorok, trigonometria, koordinátageometria, téreometria</b>	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Vektorokkal végzett műveletek. Helyvektor, vektorkoordináták. Hegyesszögek szögfüggvényei, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszerű összefüggések. Szögfüggvények általános értelmezése. Kerület, terület, felszín, térfogat.	
<b>Ismeretek/Fejlesztési követelmények</b>	<b>Kapcsolódási pontok</b>	
Koordinátáikkal adott vektorok hajlásszögének meghatározása. Egyértelmű vektorfelbontás tétele. Skaláris szorzat koordinátákból való kiszámítására vonatkozó tétel (bizonyítással). A matematika belső fejlődésének felismerése. Új fogalmak alkotása. Vektorok eszközjellegű használata. A skaláris szorzat	<i>Fizika:</i> vektormennyiségek (erő, sebesség, gyorsulás, térerősség), munka, elektromosságban.	

<p>újszerűségének felfedezése. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.</p>	
<p>Szögfüggvények: addíciós képletek alkalmazása egyszerű feladatokban (két szög összegének illetve különbségének szinusz, koszinusz, tangense; kétszeres szögek szinusz, koszinusz, tangense). Ismeretek alkalmazása. Ismeretek memorizálása.</p>	<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás, hullámmozgás leírása.</p>
<p>Szinusztétel (bizonyítással), koszinusztétel (bizonyítással). A matematika belső fejlődésének megismerése. Általános eset és különleges eset viszonya. Az összefüggés felfedezése és alkalmazása. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> alakzatok adatainak meghatározása. <i>Földrajz:</i> távolságok, szögek kiszámítása – terepmérési feladatok. GPS-helymeghatározás.</p>
<p>Szakasz osztópontjai, háromszög súlypontja: szakasz felezőpontjára vonatkozó összefüggés (bizonyítással), szakasz harmadolópontjainak kiszámítására vonatkozó összefüggés (bizonyítással), szakasz m:n arányú osztópontjára vonatkozó összefüggés, háromszög súlypontjára vonatkozó összefüggés (bizonyítással). Geometriai szemléletformálás egy új nézőpontból, geometriai ismeretek megfogalmazása algebrai alakban. Képletek értelmezése és használata. Elemi geometriai ismeretek alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása.</p>	<p><i>Fizika:</i> alakzatok tömegközéppontja.</p>
<p>Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens. A különböző jellemzők közötti kapcsolat értése, használata.  Az egyenes egyenletének levezetése a síkban különböző kiindulási adatokból. (Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes egyenlete; adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete; iránytényezős egyenlet.) Alakzat egyenlete fogalom megértése. Tudományterületek összekapcsolása. Az egyenest jellemző adatok, köztük levő összefüggések értése, használata.  Síkbeli egyenesek hajlásszögének meghatározása. Geometria és számolás. Skaláris szorzat használata.</p>	

<p>A kör egyenletének levezetése. Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata. Alakzat és egyenletének összekapcsolása. Kör egyenletének megismerése. Kör és egyenes kölcsönös helyzete. Körhöz külső pontból húzott érintő egyenletének felírása. Két kör kölcsönös helyzete. Két kör metszéspontjainak meghatározása.</p> <p>Geometriai fogalmak megjelenítése algebrai formában is. Algebrai ismeretek mozgósítása geometriai problémákban is. Geometriai ismeretek mozgósítása. Elsőfokú illetve másodfokú egyenletrendszer megoldása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. Szerkeszthetőségi kérdések.</p>	
<p>A parabola tengelyponti egyenlete. Feladatok megoldása a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű parabolákkal.</p> <p>Alakzat és egyenletének összekapcsolása. Geometriai fogalmak megjelenítése algebrai formában is. Algebrai ismeretek mozgósítása geometriai problémákban is. Geometriai ismeretek mozgósítása.</p>	<p><i>Fizika: geometriai optika, fényszóró, visszapillantó tükör.</i></p>
<p>Csonka gúla és csonka kúp térfogatképlete (bizonyítással) Valós problémához modell alkotása: geometriai modell. A test felismerése. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.</p>	<p><i>Vizuális kultúra: építészet.</i></p>
<p><b>Kulcsfogalmak/fogalmak</b></p>	<p>Skaláris szorzat. Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező. Egyenes, kör, parabola egyenlete. Csonka gúla, csonka kúp.</p>

	<b>5. Valószínűség</b>
	Adatok elemzése, táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, med
	Az emelt szinten érettségiző diák ismerje a véletlen szerepét egyszerű s valószínűségi modellben számításokat végezni. A mindennapi élet történése

<b>Ismeretek/Fejlesztési követelmények</b>				
módusz,	szórás,	átlagos	abszolút	eltérés,
tartozó adatpárjai. Számítógép használatának lehetőségei. Következtetések levonása írott, ábrázolt és számszerű információ				
ismerése. Kapcsolat a halmazok és a logika műveleteivel. A műveletek újszerűségének felfedezése.				
ége. Kizáró események, független események valószínűsége. Feltételes valószínűség. Eseményekre. Új definíciók megfogalmazása.				
d.				
zolás,			hipergeometriai	
érték kiszámítása.				
	Átlagos abszolút eltérés. Átlagos minimális eltérés. Valószínűség, kizáró esemény,			